

Varianta 048

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$
- b) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- c) Aria cerută este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- d) Dacă $z = 2 - 5i$ atunci $\bar{z} = 2 + 5i$
- e) Se obține soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$
- f) Cu teorema lui Pitagora $BC = \sqrt{5}$

Subiectul II

1.

- a) 6 funcții
- b) Deoarece numai 1,2, și 3 verifică inegalitatea, probabilitatea este $\frac{3}{5}$
- c) $4^2 = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
- d) Suma este $\frac{5+95}{2} \cdot 10 = 500$
- e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^{15} + 1 = (x^{10} - 1)^{15} + 1$
 Din $(g \circ f)(0) = (-1)^{15} + 1 = 0$

2.

- a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}, (\forall)x > 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{3}{2}$
- c) $f'(x) > 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$
- d) $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4xf'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x}{x^2 + x} = 8$

Subiectul III

a) $\text{tr} A = 5$

b) Evident

c) Fie $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Evident $P \neq Q$ dar $\text{tr} A = \text{tr} B = 2$

d) Fie $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ cu $\text{tr} U = \text{tr} V$ și $\text{tr} U^2 = \text{tr} V^2 \Rightarrow a + d = m + q$ și

$a^2 + d^2 + 2bc = m^2 + q^2 + 2np \Leftrightarrow (a + d)^2 - 2ad + 2bc = (m + q)^2 - 2mq + 2np \Leftrightarrow ad - bc = mq - np$
adică $\det U = \det V$

e) Dacă $D = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$ și $E = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ atunci $(aD + bE) = \begin{pmatrix} ad + bm & ae + bn \\ af + bp & ag + bq \end{pmatrix}$ și $\text{tr}(aD + bE) =$
 $ad + bm + ag + bq$ iar $a \cdot \text{tr} D + b \cdot \text{tr} E + a(d + g) + b(m + q) = \text{tr}(aD + bE)$

f) Fie $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $G = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow F \cdot G = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$ cu $\text{tr} F \cdot G = ax + bz + cy + dt$ iar

$G \cdot F = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + td \end{pmatrix}$ cu $\text{tr} G \cdot F = ax + cy + bz + dt$ și se vede egalitatea $\text{tr} F \cdot G = \text{tr} G \cdot F$

g) Fie $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Luăm pe rând $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și obținem $c = g$,

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obținem $b = f$ și $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ apoi $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru $a = e$ și $d = h$ adică $L = N$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{x+5} \right)' = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+5)^2}, (\forall) x \geq 0$

b) Din a) se vede că $f'(x) > 0 (\forall) x \geq 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare

c) Din b) $\Rightarrow f(0) \leq f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), (\forall) x \in [0, \infty)$ adică $\frac{13}{10} \leq f(x) < 3 (\forall) x \in [0, \infty)$

d) $\int_0^1 f(x) dx = (3x - \ln(x+1)(x+2)(x+5)) \Big|_0^1 = 3 - \ln 36 + \ln 10 = 3 + \ln \frac{5}{18}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ asimptotă orizontală către $+\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \ln(x+1)(x+2)(x+5) + \ln 10) = \ln 10 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[3 - \frac{\ln(x+1)(x+2)(x+5)}{x} \right] =$
 $= \ln 10 + \infty = \infty$

g) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 6x + 7) = 0$ și cum $x \geq 0$ convine $x = 1$